### §1 Parabolen herkennen

.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *y* | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

-3

-1

+ 1

+ 3

+5

**toename

tt**

+2

+2

+2

+2

* 1. +2
	2. De toename is steeds een nieuwe rand. De randen worden tekens 2 meer.
	3. De tt blijft hetzelfde namelijk +2.
	4. De tt verandert en is a keer zo groot.
1. .
	1. Wel. tt = 2
	2. Wel. tt = 2
	3. Niet

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| *y* | 8 | 3 | 0 | -1 | 0 | 3 | 8 | 15 | 24 | 35 |

1. 1. 
	2. tt = 2
	3. Top (3,-1)
	4. Nulpunten (2,0) en (4,0)
	5. (1,3) en (5,3) of (-1,15) en (7,15)
	6. y = - 1 + (x-3)2
	7. De maximale hoogte is 4,5 meter

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| *y* | 2 | 2,9 | 3,6 | 4,1 | 4,4 | 4,5 | 4,4 | 4,1 | 3,6 | 2,9 | 2,0 | 0,9 | *-0,4* |

 De tt = -0,2.

* 1. Maximale hoogte bereikt na 5 meter
	2. De kogel kwam tussen de 11 en 12 meter ver op de grond
	3. y = 4,5 – a·(x-5)2 want bergparabool met maximale hoogte 4.5 bij x = 5 (controleer)
	Nu a nog berekenen door een punt in te vullen, bijvoorbeeld (10,2)
	Dat geeft 4,5 - a·(10-5)2 = 2
	 4,5 - a·25 = 2
	 a·25 = 2,5
	 a = 0,1
	Een passende formule is dus y = 4,5 – 0,1·(x-5)2
	Een andere correcte formules is bijvoorbeeld y = 2 – 0,1·x· (x-10) Ga na!
	Of door haakjes wegwerken y = -0,1x2 + x + 2 Ga na!
1. 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| *snelheid* | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 | -10 | -20 | -30 | -40 | -50 | -60 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t* |  | 1e | 2e | 3e | 4e | 5e | 6e | 7e | 8e | 9e | 10e | 11e |
| *afstand*50 |  | 45 | 35 | 25 | 15 | 5 | -5 | -15 | -25 | -35 | -45 | -55 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *t* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| *H* | 2 | 47 | 82 | 107 | 122 | 127 | 122 | 107 | 82 | 47 | 2 |  |

 Ga na dat de tt van de onderste tabel inderdaad -10 is.

* 1. De kogel bereikt zijn hoogste punt na 5 seconde (dan is de snelheid 0)
	2. Gedurende de eerste seconde was de gemiddelde snelheid 45 m/s. In die seconde is de bal dus 45 meter hoger gekomen. De hoogte was 2 en wordt dus 2 + 45 = 47 m op t = 1.
	Gedurende de tweede seconde was de gemiddelde snelheid 35 m/s. In die seconde is de bal dus 35 meter hoger gekomen. De hoogte was 47 en wordt dus 47 + 35 = 82 m op t = 2.
	Als je dit voortzet, zie je in de tabel dat het hoogste punt 127 meter bedraagt.
	3. Na 10 seconde is de bal weer op zijn oude hoogte.
	4. De formule moet er als volgt uit zien: H = 127 – a·(t – 5)2
	a berekenen door (0,2) invullen 127 - a·(0-5)2 = 2
	 127 - a·25 = 2
	 a·25 = 125
	 a = 5
	Dus een juiste formule is H = 127 – 5·(t – 5)2

### §2 Parabolen in vier gedaantes.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 0 | -3 | -4 | -3 | 0 | 5 | 12 | 21 | 32 | 45 | 60 |

1. 1. De tt = +2
	
	Vier keer dezelfde tabel
	2. A: (x+3)2  – 4 = 0
	 (x+3)2  = 4
	 x+3 = -2 of x+3=2
	 x = –5 of x = –1
	B: x2 + 6x + 5 = 0
	 (x + 1)(x+5) = 0
	 x = –1 of x = –5

	C: (x + 1)(x+5) = 0
	 x = –1 of x = –5
	D: (x+2)(x+4) – 3 = 0
	 (x+2)(x+4) = 3
	 x2 + 6x + 8 = 3
	 x2 + 6x + 5 = 0
	 (x + 1)(x+5) = 0
	 x = –1 of x = –5
	3. A: Top direct uit formule (–3, –4)
	BCD: Als je de nulpunten hebt dan kan je top vinden via de nulpunten x = –1 en x = –5
	 De x-coördinaat van de top zit precies in het midden, dus bij x = –3
	 De y-coördinaat vind je door x=-3 in te vullen in de formule. Dus y = –4
	 Dus de top is (–3, –4)
2.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y | 54 | 32 | 14 | 0 | -10 | -16 | -18 | -16 | -10 | 0 | 14 |

* 1. De tt = +4

	Weer vier keer dezelfde tabel
	2. Zelfde grafiek
	3. A: y =2(x– 1)2  – 18 Je ziet meteen de top (1,-18)
	B: y = 2x2 – 4x – 16 Hij gaat door (0,-16)
	C: y = 2(x – 4)(x + 2) Je ziet meteen de nulpunten (4,0) en (-2,0)
	D: y = 2x(x – 2 ) – 16 Hij gaat door (0,-16) en (2,-16)
1.

Hoe groter de afbuigingsfactor a, hoe sterker de kromming, hoe smaller de parabool.
Hoe dichter de afbuigingsfactor bij 0 komt, hoe zwakker de kromming, hoe breder de parabool
Dus a = -10 en a = 10 geven veel smallere parabolen dan bijvoorbeeld a = -1/4 of a = 1/4

1. Gegeven de parabool y = – 1 – (x–5)2
	1. Top (5, –1).
	2. Geen nulpunten want bergparabool onder de x-as? Licht toe.
	3. in de abc vorm y = – 1– (x2 –10x+25)
	 y = –1 – x2 + 10x – 25
	 y = –x2 + 10x – 26
	4. Geen ontbonden vorm anders zou de parabool nulpunten hebben.
	5. Zoek twee punten op dezelfde hoogte,bijvoorbeeld
	(0, –26) en (10, –26) geeft de half ontbonden vorm y = –x(x– 10) – 26
	of (1, –17) en (9, –17) geeft de half ontbonden vorm y = –(x–1)(x–9) – 17
	of (2, –10) en (8, –10) geeft de half ontbonden vorm y = –(x–2)(x–8) – 10
	of (3, –5) en (7, –5) geeft de half ontbonden vorm y = –(x–3)(x–7) – 5
	of (4, –2) en (6, –2) geeft de half ontbonden vorm y = –(x–4)(x–6) – 2
	maar ook (-1, –37) en (11, –37) geeft een half ontbonden vorm: y = –(x+1)(x–7) – 37
	dus er zijn oneindig veel mogelijke haf ontbonden vormen.
2. Bekijk nogmaals de parabool van opgave 4.
	1. Formule in de topvorm: y = 4,5 – 0,1·(x–5)2
	2. 4,5 – 0,1·(x–5)2 = 0
	0,1·(x–5)2 = 4,5
	(x–5)2 = 45
	x–5= 6,71 of x–5 = -6,71
	x=11,71 of x=-1,71
	Een formule in de productvorm is dus bij benadering: y = -0,1(x–11,71)(x+1,71)
	3. y = 4,5 – 0,1·(x–5)2
	y = 4,5 – 0,1(x2–10x+25)
	y = 4,5 – 0,1x2+x–2,5
	y = -0,1x2 + x +2 (De formule in de abc vorm)
	4. Zoek twee “mooie” punten op gelijke hoogte bijvoorbeeld (0,2) en (10,2) (symmetrie bij x=5)!
	Een half-ontbonden vorm is dus y = – 0,1·x· (x–10) +2
3. 
Bekijk nogmaals de parabool van opgave 5.
	1. H = 127 – 5·(t – 5)2
	2. 127 – 5·(t – 5)2 = 0
	5·(t – 5)2 = 127
	(t – 5)2 = 25,4
	t – 5 = 5,04 of t – 5 = -5,04
	t = 10,04 of t = -0,04
	Productvorm bij benadering: y = -5(t – 10.04)( t + 0,04)
	3. 127 – 5·(t – 5)2
	127 – 5·(t2 – 10t + 25)
	127 – 5t2 + 50t – 125
	y = – 5t2 + 50t + 2
	4. Zoek twee punten op gelijke hoogte, bijvoorbeeld (0,2) en (10,2)
	y = – 5t(t–10) + 2
4.

De hoogte van een (atletiek)kogel na *t* seconden wordt gegeven door de formule:

* 1. H(0) = 3
	2. – 5t2 +12t +3 = 3
	– 5t2 +12t = 0
	– 5t(t–2,4) = 0
	t = 0 of t = 2,4
	Dus na 2,4 seconde was de kogel weer op hoogte H = 3
	3. Symmetrie bij t =1, 2 seconde, dus na 1,2 seconde was de hoogte maximaal.
	De maximale hoogte was H(1,2)= – 5(1,2)2 +12(1,2) +3 = -7,2+14,4+3 = 10,2 meter
1.

Maak een schets van de parabool y = 0,2 x2 – 2x + 8

De grafiek gaat door (0,8)
Weer op hoogte 8 als 0,2 x2 – 2x + 8 = 8
dus als 0,2 x2 – 2x = 0 ofwel 0,2x(x-10)=0 dus als x=0 en x=10
De grafiek gaat dus ook door (10,8)
Symmetrie bij x = 5 dus top is (5,3)
Deze drie punten zijn genoeg om de grafiek te schetsen.


Schets de grafieken bij de volgende formules:

* 1. y = *x*2 −6*x* + 5 door (0,5) (6,5) en top (3, -4)
	2. y = 0,1·*x*2 − 0,8*x* + 2 door (0,2) (8,2) en top (4; 0,4)
	3. y = -3·*x*2 + 5*x* + 1 door (0,1) (5/3, 1) en top (5/6;37/12)
	
1. 1. De top van *y* =5(*x*−3)2 −4 is (3,-4)
	2. Bijvoorbeeld 1 links en 1 rechts van de top: (2,1) en (4,1)
	
	3. De grafiek *y*= -0,2(*x*−3)(*x*+2) snijdt de x-as bij (3,0) en (-2,0)
	4. Symmetrie bij x=0,5 dus top is (0,5;1,25)
	

De grafiek y = -3*x*(*x*-2) + 5 gaat door (0,5) en (2,5)
Symmetrie bij x = 1 dus top is (1,8)


1. 

Van een en de zelfde brugboog zijn de volgende (gelijkwaardige) formules bekend.

 *h* = −0,004 *x*2 + 0,88 *x* – 12,3

 *h* = 36,1 − 0,004∙(*x* − 110)2

 *h* = -0,004·(*x*−15)(*x*−205)

 *h* = 0,004 *x*∙(220 − *x*) – 12,3

*h* de hoogte boven het wegdek (m) *x* de horizontale afstand vanaf de linker pijler (m)

Ga steeds na welke formule(s) je gebruikt voor de volgende vragen:

* 1. Hoogste punt van de brug boven het wegdek is 36,1 meter. Neem *h* = 36,1 − 0,004∙(*x* − 110)2
	2. Het *laagste* punt van de brug onder het wegdek bij x=0 dus -12,3.
	Neem *h* = 0,004 *x*∙(220 − *x*) – 12,3 of *h* = −0,004 *x*2 + 0,88 *x* – 12,3
	3. De brug is 220 meter lang. Neem *h* = 0,004 *x*∙(220 − *x*) – 12,3
	4. 30/220 = 3/22 deel van de boog ligt onder het wegdek.
	Neem *h* = 0,004 *x*∙(220 − *x*) – 12,3 voor de totale lengte van de brug: 220 meter
	Neem *h* = -0,004·(*x*−15)(*x*−205) voor het deel onder het wegdek, namelijk tussen x=0 en x =15 en tussen x=205 en 220. Ofwel 30 meter onder het wegdek.

### §3 Parabolen tekenen en raden.

* 1. Waar zit de symmetrie-as van de grafiek van *y*=5·*x*2 +7*x*+13?
	5·*x*2 +7*x*+13=13
	5·*x*2 +7*x*=0
	x(5x+7)=0
	x=0 of 5x+7 = 0
	x=0 of x=-7/5
	Dus symmetrie bij x = -7/10
	2. 5·*x*2 +40*x*+12 =12
	5·*x*2 +40*x*=0
	x=0 of x=-8
	Terugkeerpunt is (-8,12)
	3. Symmetrie bij x = -4
	4. Symmetrie-as bij x = 9
	5. Symmetrie bij x = 5/6
	6. A·*x*2 + B·*x* +C = C
	A·*x*2 + B·*x* = 0
	x(Ax+B) = 0
	x=0 of x= -B/A
	Symmetrie bij x = -B/(2A)
1. 

ytop vind je door xtop in te vullen in y = A·*x*2 + B·*x* +C



Bepaal van de volgende parabolen de top en twee andere punten, en schets de grafiek:

* 1. y = *x*2 +6*x* – 5 heeft xtop = -6/2 = -3 dus top is (-3, -14)
	Ook door (0,-5) en (-6,-5)
	2. y = -0,01·*x*2 + 0,08 *x* + 2 heeft xtop = -0,08/-0,02 = 4 dus top is (4; 2,16)
	Ook door (0,2) en (8,2)
	3. y = 3·*x*2 -7*x* + 1 heeft xtop = 7/6 dus top is (**)**
	Ook door (0,1) en (7/3,1) maar ook door (1, -3)
	

Bepaal van de volgende parabolen de symmetrie-as, en de top

* 1. *y* = (*x*−3)(*x*−5) heeft top (4,-1)
	2. *y* = (*x*+3)(*x*−5) heeft top (1,-16)
	3. *y* = 5(*x−*2)(*x*+5) heeft top (-1,5;-61,25)
	4. *y* = (5*x*−7)(2*x*−3) heeft top (1,45; -1/40)

* 1. Geef voor de grafieken hiernaast een passende formule:
		1. Top(0;5) door (1;6) ***y* = *x*2 +5**
		2. Top (0;5) door (2;3) ***y* = 5 − 0,5·*x*2**
		3. Top (0;-7) door (2;1) ***y* = 2·*x*2 -7**
		4. Top (0;-3) door (2;-2) ***y* = 0,25·*x*2 −3**

Geef een algemene formule voor alle grafieken die als Top (0,7) hebben ***y* = *a·x*2 +7**

* 1. Geef voor de grafieken hiernaast een bouwschema
	***y* = *a*(*x*− *p*)2 + *q***
	2. Geef voor de grafieken hiernaast een passende formule

**y = 2·(*x*+5)2 +3**

**y = -(*x*+4)2**

**y = -2·(*x*−1)2 +7**

**y = 0,25·(*x*−3)2**

**y = (*x*−5)2**

1. 1. Een dalparabool heeft als nulpunten 2 en 7.
	**y = (*x*-2)(*x*-7) ; y = 2(*x*-2)(*x*-7) ; y = 3(*x*-2)(*x*-7)**
	2. Een bergparabool heeft als nulpunten 0 en 6. Geef 3 mogelijke formules
	**y = -*x*·(*x*-6) y = -2*x*·(*x*-6) ; y = -½*x*·(*x*-6)**
	3. Een parabool heeft als nulpunten 0 en 6, en als Top (3; 3). Geef een formule
	**y = -*x*·(*x*-6)/3 = *x*(6-*x*)/3**
	4. Een parabool heeft als nulpunten -1 en 2 en gaat door (0;1) .Geef een formule: **y = -½ ·(*x*+1)(*x*-2)**

Geef voor ieder van de grafieken hiernaast een formule
***y*= (*x*+8)(*x*+3)**

***y*= -3(*x*+6)(*x*+3)**

***y*= ½·(*x*+1)(*x*−6)**

***y*= -0,25·*x*(*x*−7)**

Tijdens een bepaalde service beschrijft de tennisbal een baan die voldoet aan de volgende formule: [*x* horizontale afstand, *h* hoogte , beide in meters ]

Het net staat op ongeveer 12,5 meter, en is 1 meter hoog.

* 1. Ga na op welke hoogte de tennisbal ‘begint’ aan zijn baan **2,5 m**
	2. Ga na dat de bal over het net gaat.  ***x*=12,5 levert op: *h*≈1,94 en dat is hoger dan 1 meter**
	3. Ga na waar de bal weer op de “beginhoogte’ is **na 10 meter**
	4. Bepaal het hoogste punt. **Na 5 meter: *h*=2,95**

Voor de boog onder een brug zoals hiernaast geldt

Met *h*: hoogte in meters t.o.v. het wegdek

en *x*: afstand in meters vanaf de linkerkant.

* 1. Bereken hoe breed het ravijn is **Ruim 133 m**
	2. Bereken hoeveel meter de boog in het midden onder het wegdek zit **Ruim 3 meter**
	3. Bereken zonder rekenmachine $2\frac{2}{3} ∙3\frac{3}{4}$

**Antwoord:** $\left(2+\frac{2}{3}\right)∙\left(3+\frac{3}{4}\right)=2∙3+2∙\frac{3}{4}+\frac{2}{3}∙3+\frac{2}{3}∙\frac{3}{4}=6+1\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}=10$

**Of makkelijker:** $\frac{8}{3} ∙\frac{15}{4}=\frac{120}{12}=10$ **of nog makkelijker** $\frac{8}{3} ∙\frac{15}{4}=\frac{2}{1} ∙\frac{5}{1}=10$

Wiskundedocent Willem van Ravenstein deed begin 2013 een verrassende ontdekking.



* 1. Welke vermenigvuldiging van twee gemengde breuken hoort bij a = 6? Geef ook de uitkomst.

$6\frac{6}{7} ∙7\frac{7}{8}=\frac{48}{7} ∙\frac{63}{8}=\frac{6}{1} ∙\frac{9}{1}=54$ (**Zie je dat *vooraf* vereenvoudigen makkelijker gaat dan** $\frac{3024}{56}=\frac{54}{1}$ )

Minstens zo verrassend is dat de uitkomsten U horen bij een kwadratische formule.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| U | **4** | **0** | **-2** | **-2** | **0** | **4** | 10 | 18 | 28 | 40 | **54** |

* 1. Bepaal de tt en zoek de nulpunten door de tabel af te maken. **tt = +2 Nulpunten (-3,0) en (0,0)**
	2. Geef een formule in de ontbonden vorm. **U = a(a+3)
	De afbuigingsfactor is de helft van de tt, de afbuigingsfactor is dus 1.
	Je kunt de afbuigingsfactor (neem even de letter) f natuurlijk ook uitrekenen door een derde punt in te vullen. U = f·a·(a+3) door (1,4) geeft: f·1·(1+3) = 4 🡺 4·f = 4 🡺 f =1**
	3. Geef ook een formule in de topvorm. Top (-**1½ , - 2¼) dus**
	**U = (a+1½)2 - 2¼**
1. 1. 4×5×6×7 = 840 = 841 – 1 = 292 – 1 klopt
	11×12×13×14 = 24024 = 24025 – 1 = 1552 – 1 klopt ook.
	2. 0×1×2×3 = 0 = 1 – 1 = 12 – 1 Een factor mag dus ook nul zijn, dus niet per se positief.
	-4×-3×-2×-1= 24 = 25 – 1 = 52 – 1 De factoren mogen kennelijk ook negatief zijn.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | 1 | 2 | 3 | 4 | … | n | n |
| P | 52-1 | 112-1 | 192-1 | 292-1 | … | K2-1 | (n2+3n+1)2-1 |

* 1. Een formule voor het getal K vind je bijvoorbeeld door de tabel uit te breiden. De tt = +2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| K | 5 | 1 | -1 | -1 | 1 | 5 | 11 | 19 | 29 | 41 |

Mogelijke formules voor K zijn:

 K= (n+1.5)2 – 1.25 = n2+3n+1 = n(n+3)+1 = (n+1)(n+2)-1 = (n-1)(n+4)+5

*Toegift:*

Merk op dat K2 -1 = (K – 1)(K+1) *(3e merkwaardige product)*
Dat kun je mooi gebruiken om zonder tabel een formule voor P af te leiden:

P = n(n+1)(n+2)(n+3)
P = n(n+3)(n+1)(n+2)
P = (n2+3n)( n2+3n+2)
P = (n2+3n+1-1)( n2+3n+1+1)

P = (n2+3n+1)2 – 12
P = (n2+3n+1)2 – 1

Het product van 4 opeenvolgende gehele getallen is dus altijd 1 minder dan een kwadraat.